Thèmes : Mesures et incertitudes
Cours 1 : Mesures et incertitudes
(version professeur)

B.O. Mesures et incertitudes.
Variabilité de la mesure d'une grandeur physique. Incertitude-type. Incertitudes-types composée. Écriture du résultat. Valeur de référence

Capacité numérique : Représenter l'histogramme associé à une série de mesures à l'aide d'un tableur ou d'un langage de programmation. Simuler, à l'aide d'un langage de programmation, un processus aléatoire illustrant la détermination de la valeur d'une grandeur avec incertitudes types composées.

I. Chiffres significatifs.

Règles pour les chiffres significatifs d'une valeur écrite en notation scientifique (mantisse x 10^{exposant}).

Il y a quatre règles pour déterminer les chiffres significatifs :

1. Les chiffres significatifs ne concernent que la mantisse.
2. Les chiffres différents de zéro sont toujours significatifs.
3. Les zéros à gauche ne sont jamais significatifs.
4. Les zéros à droite sont toujours significatifs.

Exemples : Soit la masse m = 1,660540 × 10^{-27} kg. Ce nombre est correctement écrit en notation scientifique et il comporte 7 chiffres significatifs.

Soit une substance chimique en solution de concentration centimolaire : cette concentration molaire suivant qu'elle est écrite *C* = 0,01 mol.L^{-1} ou *C* = 0,0100 mol.L^{-1} ***n'a pas la même précision*** puisque dans le premier cas cela signifie qu'elle est connue avec 1 chiffre significatif et dans le deuxième cas avec 3.

D'ailleurs dans le cas où cette concentration molaire est connue à 1% près, il est préférable d'écrire : *C* = 1,00 × 10^{-2} mol.L^{-1} écriture correcte relativement à la notation scientifique et au respect des chiffres significatifs.

II. Incertitude type et incertitude relative.

1. Définitions.

L'incertitude type est la valeur de l'écart type (s_X) divisée par la racine carrée du nombre de mesures : $\hat{u}_X = \frac{s_X}{\sqrt{N}}$

$\frac{\hat{u}_X}{X_e}$: est l'incertitude relative sur Xe : elle n'a pas d'unité (100 × $\frac{\hat{u}_X}{X_e}$: donne l'incertitude relative en pourcentage)

2. Règles d'écriture

En notation scientifique, la valeur estimée et l'incertitude absolue d'une grandeur doivent être écrites avec la même puissance de 10 (et la même unité !) (et un nombre de chiffres significatifs cohérents). Généralement on prend un chiffre significatif.

Exemples : *C* = (1,00 ± 0,02) x 10^{-2} mol.L^{-1} *h* = (1,70 ± 0,01) m ....

III. Estimateur de l'incertitude d'une grandeur.

Voir la fiche annexe

Attention : Si on effectue une mesure à l'aide d'une règle graduée dont la plus petite graduation est 1,0 mm, alors l'incertitude type sera égale à :

$\hat{u}_x = \sqrt{2 \times \left(\frac{l}{\sqrt{12}}\right)^2}$ soit $\hat{u}_x = \sqrt{2} \times \frac{l}{\sqrt{12}}$ Vous appliquerez la relation fournie selon l'exercice.

$\hat{u}_X$ s'écrit avec 1 ou 2 chiffres significatifs avec autant de décimales que celles présentes dans la moyenne et toujours par excès
Exemple pour une valeur de la vitesse moyenne v = 25,4 m.s^{-1} et une incertitude type égale à $\hat{u}_v = 0{,}13$ m.s^{-1} on écrira :
v = (25,4 ±0,2) m.s^{-1}

1. **Incertitudes types composées.**

Voir Fiche annexe

Remarque :

Les formules sont fournies au baccalauréat.
Elles ne le seront pas toujours lors des TP et DST. Il faut donc s'entraîner à les retrouver.

Le logiciel GUM_MC permet de calculer les propagations d'incertitudes.

Exemple de calcul pour une vitesse :

L'incertitude sur la durée est $\hat{u}_t$ = 0,01 s.
L'incertitude sur la longueur est $\hat{u}_L$ = 0,001 m
$\hat{L} = 10{,}00$ m
$\widehat{\Delta t} = 2{,}00$ s
$V = \frac{L}{\Delta t}$

L'incertitude-type sur la vitesse est égale à : $\hat{u}_V = \hat{V} \cdot \sqrt{\left(\frac{u_t}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{u_L}{L}\right)^2}$

$\Leftrightarrow \hat{u}_V = 5{,}00 \cdot \sqrt{\left(\frac{0{,}01}{2{,}00}\right)^2 + \left(\frac{0{,}001}{10{,}00}\right)^2}$ = 2,50 × 10^{-2} m

Le résultat s'écrira : V = (5,00 ± 0,03) m.s^{-1}

IV. Acceptabilité d'un résultat.

Afin de comparer la valeur expérimentale avec une valeur de référence, on utilisera le quotient $\frac{|m_{mesurée} - m_{référence}|}{u(m)}$ où $\hat{u}$(m) est l'incertitude-type associée au résultat comme critère principal comparatif. Si ce quotient est inférieur ou égal à 2, on peut considérer que la mesure acceptable. $\frac{|m_{mesurée} - m_{référence}|}{u(m)} \leq 2$
Ce quotient est appelé **z-score**

Bac Polynésie 2023 (version adaptée)

L'analyseur d'hématologie est un appareil permettant d'effectuer de manière automatisée une analyse quantitative des cellules contenues dans le sang, en particuliers les globules blancs (leucocytes).

On peut déterminer la taille d'une cellule par une méthode de diffraction. Pour cela on utilise la formule suivante : $a = \frac{2{,}44 \times D \times \lambda}{L}$
Une cellule placée sur le trajet d'un faisceau laser de longueur d'onde λ = (635 ± 1) nm, génère une figure de diffraction dont la tache centrale a un diamètre L = (45 ± 1) mm sur un capteur placé à une distance D = (350 ± 1) mm de la cellule.

1. Déterminer la valeur de la taille de la cellule notée a_{exp} avec 4 chiffres significatifs.
   $a_{exp} = 2{,}44 \times \frac{635 \times 10^{-9} \times 350 \times 10^{-3}}{45 \times 10^{-3}} = 1{,}205 \times 10^{-5}$ m *(avec 4 CS comme demandé)*
2. Déterminer la valeur de l'incertitude-type notée $u(a)$ avec deux chiffres significatifs à l'aide de la formule suivante :

$$\hat{u}(a) = a_{exp} \times \sqrt{\left(\frac{u(D)}{D}\right)^2 + \left(\frac{u(\lambda)}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{u(L)}{L}\right)^2}$$

Donc $u(a) = 1{,}205 \times 10^{-5} \times \sqrt{\left(\frac{1\text{ mm}}{350\text{ mm}}\right)^2 + \left(\frac{1\text{ nm}}{635\text{ nm}}\right)^2 + \left(\frac{1\text{ mm}}{45\text{ mm}}\right)^2} = 2{,}706 \times 10^{-7}\text{m} = 2{,}8 \times 10^{-7}\text{m}$

(avec 2 CS comme demandé, arrondi au supérieur car c'est une incertitude)

3. Ecrire la valeur de la taille a de la cellule sous la forme : $a = a_{exp} \pm \mathrm{u}(a)$ avec un nombre correct de chiffres sur la valeur de a_{exp}.

   $a = (120{,}5 \pm 2{,}8) \times 10^{-7}\text{m}$

4. En utilisant le z-score, vérifier que cette étude correspond bien à celle d'un neutrophile.

   Calculons l'écart normalisé (« z-score ») : $\text{z-score} = \frac{|12{,}05 - 12|}{0{,}28} = 0{,}18$.

   Le z-score est inférieur à 2 donc la valeur expérimentale et la valeur de référence sont en accord.

   Il s'agit bien d'un neutrophile

Nom	Image	Diagramme	Proportion	Diamètre	Cytoplasme
Neutrophile			40 à 75 %	12 µm	clair, avec granulations colorables par la mise en évidence de la myélopéroxydase.

Annexe
La méthode de Monte Carlo
Pour aller plus loin

Il existe une autre méthode permettant de s'affranchir du calcul des incertitudes composées.
Il s'agit de la méthode de Monte Carlo utilisant un programme Python.

L'objectif est de simuler des processus aléatoires qui permettent la détermination de la valeur de différentes grandeurs avec incertitudes-types composées

Source :https://cache.media.eduscol.education.fr/file/2019-Mesure_incertitudes/60/1/GRIESP_Tle_Beer_Lambert_Monte_Carlo_1207601.pdf

Expérience : Des élèves effectuent une préparation de deux solutions en vue d'un dosage.

Pour cela, ils disposent d'une solution, notée S_0, préparée selon le protocole suivant :

- On obtient tout d'abord une solution mère S_m par dissolution de *m* = 297,0 mg de bleu patenté V (M = 582,66 g.mol-1) dans une fiole jaugée de V_{f1} = 1,0000 L.
- On prélève, avec une pipette jaugée, V_p = 10,00 mL de solution mère S_m, que l'on dilue dans une fiole jaugée de V_{f2} = 250,0 mL. On obtient ainsi la solution S_0.

1. Calculer la concentration C_m en quantité de matière de la solution mère S_m et C_0 de la solution S_0.

$$C_m = \frac{m}{M \cdot V_{f1}} = \frac{0{,}2970}{582{,}66 \times 1{,}0000} = 5{,}097 \times 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$$
$$C_0 = \frac{C_m \cdot V_p}{V_{f2}} = \frac{5{,}097 \times 10{,}00 \times 10^{-3}}{0{,}2500} = 2{,}039 \times 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$$

2. On veut calculer les incertitudes-type des concentrations C_0 et C_m dont les expressions sont :
$C_0 = \frac{C_m \cdot V_p}{V_{f2}}$ et $C_m = \frac{m}{M \cdot V_{f1}}$
On constate que C_0 dépend de C_m, le calcul des incertitudes-composés est dans ce cas plus complexe.

La méthode de Monte-Carlo permet d'étudier la variabilité de C_m et C_0 sans avoir besoin d'utiliser des formules de composition d'incertitudes.

Cette variabilité est expliquée par différentes incertitudes qui s'accumulent tout au long du protocole : incertitudes de la pesée, de la masse molaire et de la fiole jaugée pour la dissolution ; incertitudes de la pipette jaugée et de la deuxième fiole jaugée pour la dilution.

On prendra (évaluation des incertitudes-type par une autre approche que statistique - type B) :

- pesée : d'après la notice de la balance, on prendra u(m) = 1 mg ;
- masse molaire : u(M) = 0,01 g.mol-1 (dernier chiffre significatif, incertitude négligeable) ;
- fiole jaugée : u(Vf1) = 0,0008 L (à lire sur la fiole jaugée) ;
- pipette jaugée : u(Vp) = 0,02 mL (à lire sur la pipette jaugée) ;
- fiole jaugée : u(Vf2) = 0,3 mL (à lire sur la fiole jaugée).
- burette graduée : u(V1) = u(V2) = 0,05 mL (à lire sur la burette graduée)

Un jeu de données (m, M, V_{f1}, Vp, V_{f2}) est tiré au sort (tirage avec écarts-types connus, loi normale) pour calculer C_m et C_0. La procédure est répétée un grand nombre de fois. On calcule les moyennes et les écarts-types $u(C_m)$, $u(C_0)$.

Utiliser le programme INCTYP1 (à la fin de DM) afin de déterminer les valeurs des incertitudes-types.

Programme Python INCTYP1

```
import numpy as np
from matplotlib import pyplot
#Renvoie une valeur aléatoire de la variable L[0] d'incertitude-type L[1]
def Alea(L):
 tirage=np.random.normal() #Tirage entre -infini et +infini (loi normale)
 return L[0]+L[1]*tirage
##################################################################################
#Entrées
m=[297.e-3,1.e-3]
M=[582.66,0.01]
Vf1=[1.0000,0.0008]
Vp=[10.00e-3,0.02e-3]
Vf2=[250.0e-3,0.3e-3]
#Calcul de Cm et C0
Cm=m[0]/(M[0]*Vf1[0])
C0=Cm*Vp[0]/Vf2[0]
##################################################################################
#Méthode de Monte Carlo pour trouver l'incertitude sur Cm et C0
#sans composition des incertitudes
LCm,LC0=[],[]
iteration=100000
for i in range(iteration):
 AleaCm=Alea(m)/(Alea(M)*Alea(Vf1))
 AleaC0=AleaCm*Alea(Vp)/Alea(Vf2)
 LCm.append(AleaCm)
 LC0.append(AleaC0)
MoyCm=sum(LCm)/iteration
MoyC0=sum(LC0)/iteration
uCm=(1/(iteration-1)*sum((np.array(LCm)-MoyCm)**2.))**0.5
uC0=(1/(iteration-1)*sum((np.array(LC0)-MoyC0)**2.))**0.5
##################################################################################
#Affichage
print('Calcul de Cm :',Cm)
print('Moyenne des Cm :',MoyCm)
print('u(Cm) :',uCm)
pyplot.hist(LCm, range = (0.000505, 0.000515), bins = 50, color = 'blue',
edgecolor = 'black')
pyplot.xlabel('Cm (mol/L)')
pyplot.ylabel('effectif')
pyplot.title('Pour 100 000 iterations')
pyplot.show()
print('Calcul de C0 :',C0)
print('Moyenne des C0 :',MoyC0)
print('u(C0) :',uC0)
pyplot.hist(LC0, range = (2.0e-5, 2.1e-5), bins = 50, color = 'blue',
edgecolor = 'black')
pyplot.xlabel('C0 (mol/L)')
pyplot.ylabel('effectif')
pyplot.title('Pour 100 000 iterations')
pyplot.show()
##################################################################################
```

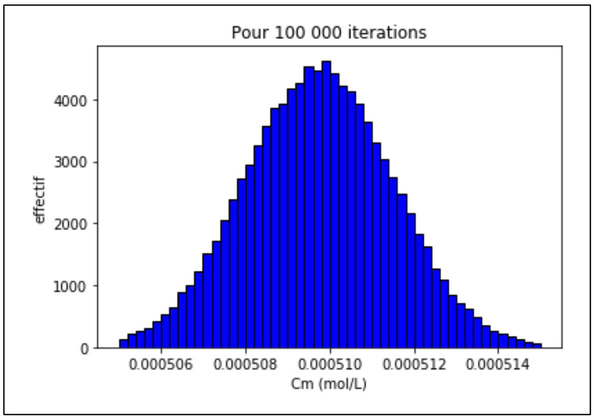
Exploitation des résultats

1. Afficher les histogrammes obtenus ainsi que les valeurs des concentrations et des incertitudes-type
2. Ecrire des résultats sous la forme C = [$\bar{C}$ ± u(C)] × 10^{-n} avec un chiffre significatif pour les incertitudes-type.

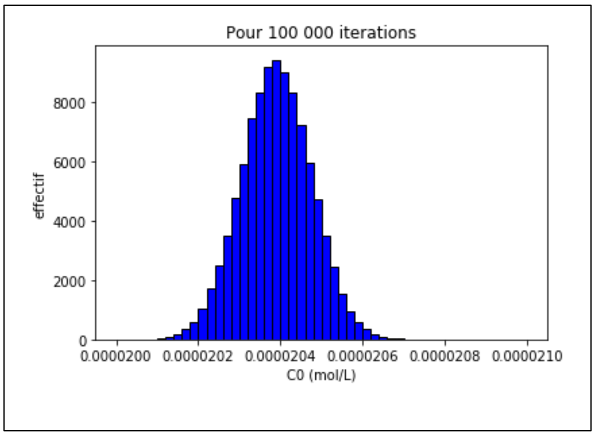
Réponses :

1. Résultats obtenus

Calcul de C_m : 0.0005097312326227989 mol.L^{-1}
Moyenne des C_m : 0.0005097335016024325 mol.L^{-1}
u(C_m) : 1,762982803552685 × 10^{-6} mol.L^{-1}



Calcul de C_0 : 2.0389249304911954 × 10^{-5} mol.L^{-1}
Moyenne des C : 2.038943593865876 × 10^{-5} mol.L^{-1}
u(C_0) : 8,497832418097028 × 10^{-8} mol.L^{-1}



2. C_m = (510 ± 2) × 10^{-6} mol.L^{-1}
   C_0 = (2 039 ± 9) × 10^{-8} mol.L^{-1}

Analyse du programme :

1. D'après le programme, quelles sont les expressions des concentrations C_0 et C_m
2. Combien de fois, la procédure a-t-elle été répétée dans le programme ?
3. Quelle est la fonction de la ligne de programme « tirage=np.random.normal() #Tirage entre -infini et +infini (loi normale) » ?
4.

Réponses :

1. les expressions sont : $C_0 = \frac{C_m \cdot V_p}{V_{f2}}$ et $C_m = \frac{m}{M \cdot V_{f1}}$
2. La procédure a été répétée 100 000 fois.
3. La ligne de programme sert à générer des nombres aléatoires depuis une loi normale centrée réduite (ou loi normale standard) en python.